經濟論叢

第九十六巻　第四號

昭和四十年十月

京都大學經濟學會

J. R. Hicks の「平均期間の理論」

――数学解析による証明，および，吟味――

佐　波　宣　平

I　は　し　が　き

本稿は，まず，J. R. Hicks がその著「価値と資本」(*Value and Capital*)の第14章で殆んどもっぱら言葉で，しかも，比較的簡略に叙述している「平均期間」の理論を数学解析の展開によって確認し，ついで，その吟味にあたることを目的とする。というのは，仮定のとりかた如何によって結論に異なる場合が生じ，この理論が一般的に妥当するとは言えないと思うがゆえである。

なお，本稿での数学解析については，Hicks の「平均期間の理論」の生命保険数学への適用をこころみた谷山新良氏著「保険の性格と構造」[1] 第3章に負うところ多大である。記して感謝の意を表する。ただし，展開の過程，結論においては同氏著書と異なるところが多い[2]。

吟味は，大胆率直に表明しておいた。読者の忌憚なき叱正をのぞむ。なお，具体例として生命保険経営への適用をとりあげた。

II　平均期間の概念

いま，現在時点0を起点として将来によこたわる各期0, 1, 2, ……, nに配分される資本価値流列$\{M_t\}$を$M_0, M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$とし，利子率を$r$，したがって割引率を$\frac{1}{1+r}=v$とするならば，これら各資本価値の現価は

1)　谷山新良「保険の性格と構造」大阪府立大学経済学部，昭和37。

2)　(i) 命題の証明は佐波のほうが正しいと思われる。
(ii) 補助定理の証明を谷山氏は部分的にしかやっていない。
(iii) 谷山氏は，平均期間の理論を途中から生命保険に適用しているため，この理論を一般的に証明したことになっていない。これに対して，佐波は，まず，平均期間の理論が一般的成立することを数学解析によって証明し，そのあとで，生命保険への適用をこころみている。

(1) $M_0v^0,\ M_1v^1, \cdots\cdots\cdots\cdots,\ M_nv^n$

と表わせる。ここで，$t>0$ なるかぎり，M_t は将来予想価値であり，M_tv^t は現価に割り引きされた将来予想価値である。これらの，現価に割り引きされた一連の予想価値の合計額をMとするならば，次式が成立する。

(2) $$M=M_0v^0+M_1v^1+M_2v^2+\cdots\cdots+M_nv^n=\sum_{t=0}^{n}M_tv^t$$

そこで，割引率 v に関する，この資本価値流列和Mの弾力性を π とするとき，すでにわれわれの周知に属する弾力性一般の定義によって，π は次のように求められる。

$$\pi=\frac{v}{M}\ \frac{dM}{dv}$$

$$=\frac{v}{M_0v^0+M_1v^1+M_2v^2+\cdots\cdots+M_nv^n}(M_1+2M_2v^1+3M_3v^2+\cdots\cdots+nM_nv^{n-1})$$

$$=\frac{M_1v^1+2M_2v^2+\cdots\cdots+nM_nv^n}{M_0v^0+M_1v^1+M_2v^2+\cdots\cdots+M_nv^n}$$

(3) $$=\frac{(0)M_0v^0+(1)M_1v^1+(2)M_2v^2+\cdots\cdots+(n)M_nv^n}{M_0v^0+M_1v^1+M_2v^2+\cdots\cdots+M_nv^n}$$

(4) $$=\frac{\sum_{t=0}^{n}tM_tv^t}{\sum_{t=0}^{n}M_tv^t}$$

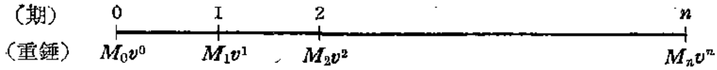
この(3)(4)を J. R. Hicks は，定義そのままに，「割引率に関する資本価値の弾力性」(elasticity of capital value with regard to discount ratio) と呼び，また，少し奇異にきこえるけれども，「平均期間」(average period) とも名づけている。

「読者は平均期間という用語で全く別個のものを頭においているかも知れないので,おそらく，こうした用語例には憤慨することでもあろう。」とは Hicks 自身の言葉である。まさに，その通りであって，「割引率に関する資本価値の弾力性」が，同時に，別名「平均期間」でもって呼ばれうる理由については，若干の説明が必要のように思われる。

上記で，期 t は現在時点0を起点とする時間的距たりを意味する。これを桿秤における目盛りと考えよう。そして，これら目盛りの個所0, 1, 2, ……, n に，

それぞれ，$M_0v^0, M_1v^1, M_2v^2, \cdots\cdots, M_nv^n$ なる重錘が附いているとしよう。

図　1



$$\frac{(0)M_0v^0+(1)M_1v^1+(2)M_2v^2+\cdots\cdots+(n)M_nv^n}{M_0v^0+M_1v^1+M_2v^2+\cdots\cdots+M_nv^n}=\frac{\sum_{t=0}^{n}tM_tv^t}{\sum_{t=0}^{n}M_tv^t}$$

こうした場合，左右釣り合いのとれる点（重心）は，これらの加重平均値でなくてはならぬ。ここで，$M_0v^0, M_1v^1, M_2v^2, \cdots\cdots, M_nv^n$ は現在点０からの将来における距たりである期間 0,1,2, ……, n に対するウェートであり，したがって，上式は（加重）平均期間を示している。そして，これは先きに導出した「資本価値の割引率弾力性」(３)，(４)に相等しい。したがって，呼称「平均期間」は，Hicks が言うように，むしろ，「きわめて適切な」用語とさえ見ることができよう。

x に関する $y=f(x)$ の弾力性は，一般に$\dfrac{f(x)\text{の変化率}}{x\text{の変化率}}$として，無名数である。これに対して，用語「平均期間」(average period) は文字どおりに解釈すれば，月，週，年，…を単位として呼ばれる名数である。しかし，「平均期間」は，むしろ，便宜上の命名であって，特に，これにこだわるほどのことはあるまい。図１は上記のように，「平均期間」の文字通りの説明として描かれているが，いま，資本価値 M_0v^0，M_1v^1，M_2v^2，……，M_nv^n がそれぞれ，０回，１回，２回，……，n 回とりあげられるとするならば，(３)，(４)はこれら回数がそれぞれ M_0v^0，M_1v^1，M_2v^2，……，M_nv^n でウェートされた平均値，したがって，無名数と見うることにもなる。

III　命　　題

かくて，割引率（したがって，利子率）に関する予想資本価値流列和の弾力性は，Hicks の呼称にしたがって，「平均期間」として捉えられるが，単にこれだけでは，予想資本価値流列和が割引率に関してどのような関係にあるか判然しない。そこで，採りあげなくてはならぬのは次の命題である。

「割引率 v の上昇（利子率 r の下落）は平均期間 π の延長にみちびき，反対に，割引率 v の下落（利子率 r の上昇）は平均期間 π の短縮にみちびく。」

以下，この命題について説明しよう。

いま，(4)から

(5) $$v\frac{dM}{dv}=\sum_{t=0}^{n}tM_tv^t \qquad M=\sum_{t=0}^{n}M_tv^t \text{ （(2)を見よ。）}$$

とし，右辺を N とおこう。

(6) $$N=v\frac{dM}{dv}$$

したがって，

(7) $$\pi=\frac{N}{M}$$

と表わせる。この(7)を v に関して微分しよう。

(8) $$\frac{d\pi}{dv}=\frac{d}{dv}\left(\frac{N}{M}\right)=\frac{\begin{vmatrix} M & \frac{d}{dv}M \\ N & \frac{d}{dv}N \end{vmatrix}}{M^2}$$

ここで，分母 M^2 について見るに，$M^2>0$ である。よって，$\dfrac{d\pi}{dv}$ の正負は(8)での分子の正負如何にかかっている。

$$分子=\begin{vmatrix} M & \frac{d}{dv}M \\ N & \frac{d}{dv}N \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sum M_tv^t & \sum tM_tv^{t-1} \\ \sum tM_tv^t & \sum t^2M_tv^{t-1} \end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2\cdots\cdots & M_n \\ 0 & 1M_1 & 2M_2\cdots\cdots & nM_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \\ v^2 & 2v \\ \vdots & \\ v^n & nv^{n-1} \end{pmatrix}\right|$$

$$=\sum_{i<j}\begin{vmatrix} M_i & M_j \\ iM_i & jM_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} v^i & iv^{i-1} \\ v^j & jv^{j-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i<j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & j \end{vmatrix}M_iM_j\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & j \end{vmatrix}v^{i+j-1}=\sum_{i<j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & j \end{vmatrix}^2M_iM_jv^{i+j-1}$$

$$=\sum(j-i)^2M_iM_jv^{i+j-1}>0 \qquad M_i,\ M_j,\ v>0$$

よって，

$$(9)\qquad \frac{d\pi}{dv}>0$$

にみちびき[3]，さきの命題が証明できる。

図　2

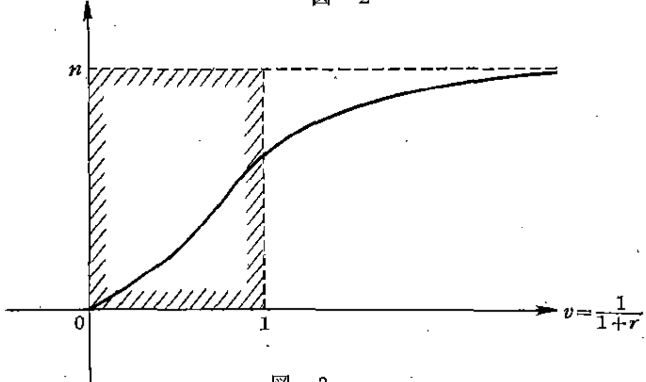
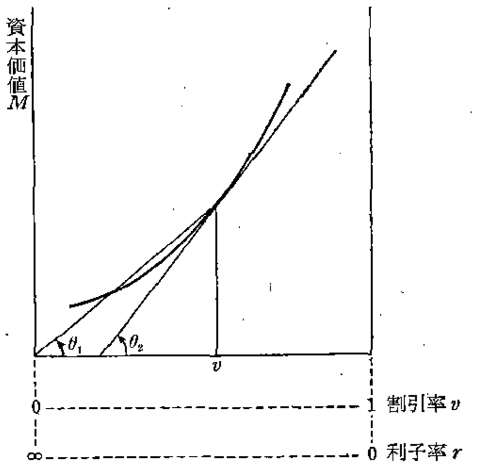


図　3



3)　この解法については，秋月康夫「代数学と幾何学」昭36，163–4 ページ，藤原松三郎「行列及び行列式」岩波全書，昭36，28–30 ページを参照。なお上のような解法によらず，いきなり計算すると，

$$分子=\begin{vmatrix}\sum M_t v^t & \sum tM_t v^{t-1}\\ \sum tM_t v^t & \sum t^2 M_t v^{t-1}\end{vmatrix}=1^2M_0M_1+2^2M_0M_2v+(3^2M_0M_3+1^2M_1M_2)v^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\{(n-1)^2M_1M_n+(n-3)^2M_2M_{n-1}+(n-5)^2M_3M_{n-2}\}v^n+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots+M_{n-1}M_nv^{2n-2}$$

となって，やはり，分子>0 が成立する。

なお，(4)にしたがって，上の命題を図示しよう。ただし，利子率の制限域$0\leqq r\leqq\infty$によって，現実には，図2で斜線を附した部分だけが有効である。

また，定義(4)から

$$(10)\qquad \pi=\frac{\frac{dM}{dv}}{\frac{M}{v}}=\frac{\text{限界値}}{\text{平均値}}$$

となる。これによれば，平均期間（資本価値の割引率弾力性）が1よりも大ということは，図3において，或るvの値に関して，$\tan\theta_1<\tan\theta_2$ということである。

資本価値流列和$M=f(v)$は，図(3)において，横軸に対して凸である。

証明： $f(v)=\sum M_t v^t$

$f'(v)=\sum tM_t v^{t-1}>0$

$f''(v)=\sum(t-1)tM_t v^{t-2}>0$

Ⅳ 補助定理

数列$\{a_i\}$を単調増加数列

$$(11)\qquad a_1<a_2<\cdots\cdots\cdots<a_n$$

とし，また，数列$\{w_i\}$は正の単調増加数列

$$(12)\qquad w_1<w_2<\cdots\cdots\cdots<w_n$$

とする。さて，数列(11)の単純算術平均値aは次のように表わせる。

$$(13)\qquad a=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$$

また，(11)，(12)で添字の同じもの同士をかけ合わして得られる加重平均値を$\hat{a}_w$としよう。

$$(14)\qquad \hat{a}_w=\frac{w_1a_1+w_2a_2+\cdots\cdots+w_na_n}{w_1+w_2+\cdots\cdots+w_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_ia_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$$

一方(11)を逆の順序に配列した単調減少数列を

4) Hicks: *Value and Capital*, Oxford, 1939, Fig. 23 では資本価値が横軸に，割引率が縦軸にとられているため，曲線が横軸に対して凹になっている。

$$(15) \qquad a_n > a_{n-1} > \cdots\cdots\cdots\cdots > a_1$$

とし，その加重平均値を $\bar{a}_w$ としよう。ただし，ウェートには，さきと同じように，(12)を用いるが，a_n, a_{n-1}, ……，a_1 に対応するウェートは，それぞれ，w_1, w_2, ……，w_n とする。

$$(16) \qquad \bar{a}_w = \frac{w_1 a_n + w_2 a_{n-1} + \cdots\cdots + w_n a_1}{w_1 + w_2 + \cdots\cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i a_{n-i+1}}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

(15)の単純算術平均値は(13)に等しく a とおくことができるが，次のような表現をとる。

$$(17) \qquad a = \frac{a_n + a_{n-1} + \cdots\cdots + a_1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}}{n}$$

そこで，まず，$a < \bar{a}_w$ なる関係が一般的に成立することを証明しよう[5]。

さきに掲げた単調増加数列(11)のうちに単純算術平均値 a を参加させると，次のように書ける。

$$(18) \qquad a_1 < a_2 < \cdots\cdots\cdots\cdots < a_\lambda < a < a_{\lambda+1} < \cdots\cdots\cdots\cdots < a_n$$

また，これに対応して用いられるウェートも次のようにする。

$$(19) \qquad w_1 < w_2 < \cdots\cdots < w_\lambda < w_{\lambda+1} < \cdots\cdots < w_n$$

ここで，次の2つの関係の成立することは説明を特に要しないであろう。

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{\lambda} w_i (a_i - a) > \sum_{i=1}^{\lambda} w_\lambda (a_i - a)$$

$$(21) \qquad \sum_{i=\lambda+1}^{n} w_i (a_i - a) > \sum_{i=\lambda+1}^{n} w_\lambda (a_i - a)$$

これら2式を辺々加えると，

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (a_i - a) > \sum_{i=1}^{n} w_\lambda (a_i - a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_i - a \sum_{i=1}^{n} w_i > w_\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_i - a \sum_{i=1}^{n} w_i > w_\lambda (na - na) \qquad \text{(13)を見よ。}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_i - a \sum_{i=1}^{n} w_i > 0$$

5) 青山秀夫，ヒックスの資本理論「経済論叢」56巻5号，昭18。

となり，両辺を $\sum_{i=1}^{n} w_i > 0$ で割ると

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} > a$$

したがって，

(22) $\quad \hat{a}_w > a$ (14)を見よ。

に到達する。次には，$\bar{a}_w < a$ なる関係が一般的に成立することを証明しよう。

まず，(15)に示した単調減少数列を，さきの(18)と同じ仕方を用いて，次のように書く。

(23) $\quad a_n > a_{n-1} > \cdots\cdots > a_{n-\lambda+1} > a > a_{n-\lambda} > \cdots\cdots > a_1$

これに対応して用いるウェートは(19)の順にしたがう。ここで，次の2つの関係の成立することは特に説明を要しないであろう。

(24) $\quad \sum_{i=1}^{\lambda} w_i (a_{n-i+1} - a) < \sum_{i=1}^{\lambda} w_\lambda (a_{n-i+1} - a)$

(25) $\quad \sum_{i=\lambda+1}^{n} w_i (a_{n-i+1} - a) < \sum_{i=\lambda+1}^{n} w_\lambda (a_{n-i+1} - a)$

これらの2式を辺々加えると，

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (a_{n-i+1} - a) < \sum_{i=1}^{n} w_\lambda (a_{n-i+1} - a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_{n-i+1} - a \sum_{i=1}^{n} w_i < w_\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} - \sum_{i=1}^{n} a\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_{n-i+1} - a \sum_{i=1}^{n} w_i < w_\lambda (na - na)$$ (17)を見よ。

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_{n-i+1} - a \sum_{i=1}^{n} w_i < 0$$

となり，両辺を $\sum_{i=1}^{n} w_i > 0$ で割ると，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i a_{n-i+1}}{\sum_{i=1}^{n} w_i} < a$$

したがって，

(26) $\quad \bar{a}_w < a$ (16)を見よ。

に到達する。よって，(22)，(26)から次式

(27) $\hat{a}_w > a > \bar{a}_w$

を得る。これがわれわれの求めんとした補助定理であって，すぐ次節にとり上げられる平均期間の理論に著しい有用性を示す。

V 平均期間の理論

収入，支出が期間にわたって次のような価値流列をなすものとしよう。

(28) 収入 $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_n$

(29) 支出 $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n$

これらの現価をとる。ただし，R_t, S_t は各期末に流列に参加するものと仮定する[6]。

(30) $R_1v^1, R_2v^2, \cdots\cdots, R_nv^n$

(31) $S_1v^1, S_2v^2, \cdots\cdots, S_nv^n$

この(30)，(31)の現価合計を，それぞれ，R，S とすれば，

(32) $$R = R_1v^1 + R_2v^2 + \cdots\cdots + R_nv^n = \sum_{t=1}^{n} R_tv^t$$

(33) $$S = S_1v^1 + S_2v^2 + \cdots\cdots + S_nv^n = \sum_{t=1}^{n} S_tv^t$$

ここで，n 期間全体にわたる収支均衡計画として，$R=S$ すなわち，

(34) $$\sum_{t=1}^{n} R_tv^t = \sum_{t=1}^{n} S_tv^t$$

が要請されるとしよう。というよりか，(34)の条件にあるとき割引率（または，利子率 r）が変化すると，それがどのような意味をもつであろうか，というのが吾々の研究課題である。なお，(34)を，次のように，k とおこう[7]。

(35) $$\sum_{t=1}^{n} R_tv^t = \sum_{t=1}^{n} S_tv^t = k \qquad k > 0$$

つぎに，公式(３)にしたがい，(32)，(33)の平均期間，π_r, π_s を求めよう。以下，$\sum_{t=1}^{n}$ を略して $\sum$ と書く。

(36) $$\pi_r = \frac{\sum tR_tv^t}{\sum R_tv^t}$$

---

6) この仮定に特に留意ありたい。後段 **VI** を参照。

7) ここで，R_t, S_t を所与，v（したがって，r）を未知として方程式(35)を解き，当の収支均衡計画を満足する v, r を求めることが出来る。しかし，これは，吾々にとって当面の課題ではない。

$$(37) \qquad \pi_s = \frac{\sum t S_t v^t}{\sum S_t v^t}$$

(36)から(37)を辺々さし引く。

$$\pi_r - \pi_s = \frac{\sum t R_t v^t}{\sum R_t v^t} - \frac{\sum t S_t v^t}{\sum S_t v^t}$$

$$= \frac{\sum t R_t v^t}{k} - \frac{\sum t S_t v^t}{k} \qquad \text{(35)を見よ。}$$

$$(38) \qquad = \frac{1}{k} \sum t (R_t v^t - S_t v^t)$$

これを次のように変形しておく。

$$(39) \qquad \pi_r - \pi_s = \frac{1}{k} \left\{ \sum t \cdot \frac{\sum t (R_t v^t - S_t v^t)}{\sum t} \right\}$$

ここで，各期の現価収入(30)から現価支出(31)を差し引いた差の流列をとる。

$$(40) \qquad (R_1 v^1 - S_1 v^1),\ (R_2 v^2 - S_2 v^2),\ \cdots\cdots,\ (R_n v^n - S_n v^n)$$

さて，この(40)が単調増加流列をなす場合と単調減少流列をなす場合の2つを区別して考察することにしよう。現実の，殊に事後 (ex post) の資本価値流列は必ずしもつねに単調増加もしくは単調減少の過程を示すとは限らないが，事前 (ex ante) の資本計画体系としては，しばしば，単調増加流列もしくは単調減少流列が可能である。

ケース(I)：(40)が単調増加流列をなす場合。

$$(41) \qquad (R_1 v^1 - S_1 v^1) < (R_2 v^2 - S_2 v^2) < \cdots\cdots < (R_n v^n - S_n v^n)$$

この流列(41)を同じく単調増加数列

$$(42) \qquad t: \quad 1 < 2 < \cdots\cdots < n$$

でウェートづけた加重平均値をつくると，それは(14)と全く同じ性質のものである。ウェートの w_i に t_i を用いているだけの相違にすぎない。それゆえ，これを，やはり，$\acute{a}_w$ で表わすとしよう。

$$\acute{a}_w = \frac{1(R_1 v^1 - S_1 v^1) + 2(R_2 v^2 - S_2 v^2) + \cdots\cdots + n(R_n v^n - S_n v^n)}{1 + 2 + \cdots\cdots + n}$$

$$(43) \qquad = \frac{\sum t (R_t v^t - S_t v^t)}{\sum t}$$

一方，(41)の単純算術平均値をとる。

$$a = \frac{(R_1 v^1 - S_1 v^1) + (R_2 v^2 - S_2 v^2) + \cdots\cdots + (R_n v^n - S_n v^n)}{n}$$

(44) $$=\frac{\sum R_t v^t-\sum S_t v^t}{n}=0$$ (34)を見よ。

そこで，補助定理(27)にしたがって，

(45) $$\frac{\sum t(R_t v^t-S_t v^t)}{\sum t}>0$$

を得る。これを(39)に用いると，$k>0$, $\sum t>0$ なるをもって，次の関係にみちびく。

(46) $$\pi_r-\pi_s>0$$

ケース(Ⅱ)：(40)が単調減少流列をなす場合。

(47) $$(R_1v^1-S_1v^1)>(R_2v^2-S_2v^2)>\cdots\cdots>(R_nv^n-S_nv^n)$$

この流列(47)を単調増加数列(42)でウェートした加重平均値をつくると，それは(16)と全く同じ性質のものであるゆえ，これを $\bar{a}_w$ で表わすことにすれば，さきと同じようにして，

(48) $$\bar{a}_w=\frac{\sum t(R_t v^t-S_t v^t)}{\sum t}$$

となる。そこで，これを補助定理(27)に当てはめると次の結果になる。

(49) $$\frac{\sum t(R_t v^t-S_t v^t)}{\sum t}<0$$ (44)を見よ。

これを(39)に用いると，さきと同じようにして，次の関係にみちびく。

(50) $$\pi_r-\pi_s<0$$

以上を要約すると，次のようになる。

(51)

(ケース)	(40)	(46)　(50)
(Ⅰ)	単調増加流列	$\pi_r-\pi_s>0$
(Ⅱ)	単調減少流列	$\pi_r-\pi_s<0$

さて，(30)，(31)から各期の現価収支差流列 G_t，つまり，

(52) $$G_1=(R_1v^1-S_1v^1),\ G_2=(R_2v^2-S_2v^2),\ \cdots\cdots,$$
$$G_n=(R_nv^n-S_nv^n)$$

をとり，これらの合計を G としよう。

(53) $$G=\sum G_t=\sum(R_t v^t-S_t v^t)$$

この G の v に関する微分をとろう。

(54) $dG=\{\sum tR_tv^{t-1}-\sum tS_tv^{t-1}\}dv$

ここで$\dfrac{dv}{v}=\theta$ とおけば，

(55) $dv=\theta v$

となる。これを(54)に代入しよう。

$$dG=\{\sum tR_tv^{t-1}-\sum tS_tv^{t-1}\}\theta v$$

(56) $$=\theta\{\sum tR_tv^t-\sum tS_tv^t\}$$

これを少し変形する。

(57) $$dG=\theta\{\sum R_tv^t\cdot\frac{\sum tR_tv^t}{\sum R_tv^t}-\sum S_tv^t\cdot\frac{\sum tS_tv^t}{\sum S_tv_t}\}$$

これに(35)，(36)，(37)を用いて，次の結論に到達する。

(58) $dG=\theta k\{\pi_r-\pi_s\}$

ここで，$k>0$，したがって，次の関係の成立することが知られる。

(59)

	利子率 r	割引率 v	割引率の変化率 θ	限界余剰 dG	収支
$\pi_r-\pi_s>0$（借手型）	下落	上昇	正	正	良化
	上昇	下落	負	負	悪化
$\pi_r-\pi_s<0$（貸手型）	下落	上昇	正	負	悪化
	上昇	下落	負	正	良化

この(59)について若干の説明を施すのは，あながちに，蛇足であるまい。

$\pi_r-\pi_s>0$，すなわち，収入流列の平均期間が支出流列の平均期間よりも大ということは，各期の収入が現在または現在に近い将来において比較的少なく，比較的遠い将来において比較的多い一方では，各期の支出が，これと反対に，現在または現在に近い将来において比較的多く，比較的遠い将来において比較的少ないという計画の場合であって，このため，現在または現在に近い将来の各期支出が各期収入をこえることによって生じる不足分は比較的遠い将来の各期収入が各期支出をこえることによって生じる余剰分でもって埋め合わされることになる。Hicks の言わゆる「借手型計画」(planning to be a borrower) がこれである。

$\pi_r-\pi_s<0$，すなわち，支出流列の平均期間が収入流列の平均期間よりも大ということは，各期の支出が現在または現在に近い将来において比較的少なく，比較的遠い将来において比較的多い一方では，各期の収入が，これと反対に，現在または現在に近い将来において比較的多く，比較的遠い将来において比較的少ないという計画の場合であって，このため，現在または現在に近い将来の各期収入が各期支出をこえることによって生じる余剰分は比較的遠い将来の各期支出が各期収入をこえることによって生じる不足分を埋め合わすために予め備えられることになる。Hicks の言わゆる「貸手型計画」(planning to be a lender) がこれである。

そして，われわれの結論たる上記(59)によれば，借手型計画では利子率の下落（上昇）によって収支状態が良化（悪化）し，貸手型計画では利子率の下落（上昇）によって収支状態が悪化（良化）する。

つぎに，$dG\gtreqless 0$ について。これは，一口に言えば，n 期間にわたっての収支均衡の或る状態から v（または r）を少し変化させることによって生じる収支差合計 G の変化量（近似値）の正負を示すものである。われわれは，さきに(57)に(35)を代入して(58)にみちびいたが，(35)は，また，それを(53)に代入すると $G=0$，つまり，n 期間にわたる収支が均衡する。これは(35)を解いて得られる v_1 が G の根であることに他ならない。上記 dG はこの根における $G=0$ からの v の変化に対する G の変化量の近似値である。

(53)から

$$G=\sum(R_t-S_t)v^t \tag{60}$$

とすると，G は v の関数であって，

$$G=G(v) \tag{61}$$

と表わせる。ここで，$G=0$ の根の一つを v_1 とし，これを $\frac{dv}{v}=\theta$ に代入すると，$\theta_1=\frac{dv}{v_1}$ となり，(58)は次のように書ける。

$$dG\Big|_{v=v_1}=\frac{1}{v_1}k\{\pi_r-\pi_s\}dv \tag{62}$$

この(62)は $v=v_1$ からの v の変化に対する G の変化量の近似値を示す。ただし，(62)の右辺における π_r，π_s も $v=v_1$ に対する値である。

VI 平均期間の理論；吟味

以上，Hicks が名著「価値と資本」のなかで展開——ただし，殆んど言葉だけによって比較的簡略に叙述——している「平均期間の理論」を数学解析によって確かめ，その有用性をあきらかにしたのであるが，ここで，事のついでに，この理論に若干の吟味を加えることにしたい。と言うのは，設定する仮定の如何によっては，この理論は一般的に成立しがたいのではないか，と思われるゆえである。

(28)，(29)では収入・支出の価値流列への参加が，ともに，各期末になされるものと仮定しているが，ここでは，こうした仮定とちがって，まず[8]，収入は各期首に，支出は各期末に価値流列に参加するものと仮定してみよう。（生命保険数学では，このような仮定をとるのが，むしろ，普通である。）すると，n 期間の現価収入・現価支出の流列は次のようになるであろう。

(63) $R_1v^0,\ R_2v^1,\ \cdots\cdots,\ R_nv^{n-1}$

(64) $S_1v^1,\ S_2v^2,\ \cdots\cdots,\ S_nv^n$

この現価流列の合計を，それぞれ，R，S としよう。

(65) $R=R_1v^0+R_2v^1+\cdots\cdots+R_nv^{n-1}=\sum R_tv^{t-1}$

(66) $S=S_1v^1+S_2v^2+\cdots\cdots+S_nv^n=\sum S_tv^t$

ここで，n 期間全体にわたっての収支均衡計画として $R=S$ が要請される。ただし，$R=S=k$ とおく。

(67) $\sum R_tv^{t-1}=\sum S_tv^t=k$

つぎに，R，S の割引率弾力性，すなわち，平均期間 π_r，π_s を求めよう。

$$\pi_r=\frac{v}{R}\ \frac{dR}{dv}$$

8) 後段ではこれとは逆に「収入が各期末に，支出が各期首に価値流列に参加する」との仮定がとられる。

$$=\frac{v}{R_1v^0+R_2v^1+\cdots\cdots+R_nv^{n-1}}[R_2+2R_3v^1+\cdots\cdots+(n-1)R_nv^{n-2}]$$

$$=\frac{1R_2v^1+2R_3v^2+\cdots\cdots+(n-1)R_nv^{n-1}}{R_1v^0+R_2v^1+\cdots\cdots+R_nv^{n-1}}$$

$$=\frac{(1)R_1v^0+(2)R_2v^1+\cdots\cdots+(n)R_nv^{n-1}}{R_1v^0+R_2v^1+\cdots\cdots+R_nv^{n-1}}$$

$$-\frac{R_1v^0+R_2v^1+\cdots\cdots+R_nv^{n-1}}{R_1v^0+R_2v^1+\cdots\cdots+R_nv^{n-1}}$$

(68)　$$=\frac{\sum tR_tv^{t-1}}{\sum R_tv^{t-1}}-1$$

$$\pi_s=\frac{v}{S}\frac{dS}{dv}$$

(69)　$$=\frac{\sum tS_tv^t}{\sum S_tv^t}$$　(37)に同じ。

(68)から(69)を辺々さし引く。

$$\pi_r-\pi_s=\frac{\sum tR_tv^{t-1}}{\sum R_tv^{t-1}}-\frac{\sum tS_tv^t}{\sum S_tv^t}-1$$

$$=\frac{1}{k}\sum t(R_tv^{t-1}-S_tv^t)-1$$

変形して，

(70)　$$=\frac{1}{k}\{\sum t\cdot\frac{\sum t(R_tv^{t-1}-S_tv^t)}{\sum t}\}-1$$

また，(63)，(64)で各期の現価収支差流列をとろう。

(71)　$(R_1v^0-S_1v^1)$，$(R_1v^1-S_2v^2)$，$\cdots\cdots$，$(R_nv^{n-1}-S_nv^n)$

これを

(72)　t ：　$1, 2, \cdots\cdots\cdots\cdots, \quad n$

でもってウェートづけた加重平均値をとると，次のようになる。

(73)　$$\hat{a}_w,\ \bar{a}_w=\frac{\sum t(R_tv^{t-1}-S_tv^t)}{\sum t}$$

(71)が単調増加流列なるとき(73)は $\hat{a}_w$ となり，(71)が単調減少流列なるとき(73)は $\bar{a}_w$ となる。

なお，(71)の単純算術平均値 a をとると，

$$=\frac{1}{n}\{(R_1v^0-S_1v_1)+(R_2v^1-S_2v_2)+\cdots\cdots+(R_nv^{n-1}-S_nv^n)\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\sum R_tv^{t-1}-\sum S_tv^t\}$$

(74)　$=0$　(67)を見よ。

そこで，補助定理(27) $\hat{a}_w > a > \bar{a}_w$ を(70)に用いると，次の関係が成立する。

(75)

$\pi_r - \pi_s$

(71)	(73)	(70)
単調増加流列	正	符号の判定ができない
単調減少流列	負	負

すなわち，収入・支出がともに各期末に価値流列に参加すると仮定した場合に到達した前節での結果(51)とは異なる結果にみちびく。

つぎには，上の仮定とはちがって，収入が各期末に，支出が各期首に価値流列に参加するという仮定を立てて考えてみよう。そうすると，n 期間にわたる現価収入，現価支出の流列は次のようになるであろう。

(76) $R_1v^1,\ R_2v^2,\ \cdots\cdots,\ R_nv^n$

(77) $S_1v^0,\ S_2v^1,\ \cdots\cdots,\ S_nv^{n-1}$

ここで，n 期間全体にわたる収支均衡計画として，先きと同じように，$R=S=k$ が要請されるとして，

(78) $\sum R_tv^t = \sum S_tv^{t-1} = k$

とおく，なお，上記から R，S の平均期間 π_r π_s を求めよう。上と全く同じようにして，

(79) $\pi_r = \dfrac{\sum tR_tv^t}{\sum R_tv^t}$

(80) $\pi_s = \dfrac{\sum tS_tv^{t-1}}{\sum S_tv^{t-1}} - 1$

そこで，(79)から(80)を辺々さし引く。ただし，前と同じように変形して，

(81) $\pi_r - \pi_s = \dfrac{1}{k}\{\sum t \cdot \dfrac{\sum t(R_tv^t - S_tv^{t-1})}{\sum t}\} + 1$

また，(76)，(77)で各期の現価収支差流列

(82) $(R_1v^1 - S_1v^0),\ (R_2v^2 - S_2v^1),\ \cdots\cdots,\ (R_nv^n - S_nv^{n-1})$

をとり，これを(72)でウェートづけた加重平均値をとれば，次のようになる。

(83) $\hat{a}_w,\ \ \bar{a}_w = \dfrac{\sum t(R_tv^t - S_tv^{t-1})}{\sum t}$

(82)が単調増加流列なるとき(83)は $\hat{a}_w$ となり，(82)が単調減少流列なるとき(83)は $\bar{a}_w$ となる。

なお，(82)の単純算術平均値 a をとると，

$$a=\frac{1}{n}\{(R_1v^1-S_1v^0)+(R_2v^2-S_2v^1)+\cdots\cdots+(R_nv^n-S_nv^{n-1})\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\sum R_tv^t-\sum S_tv^{t-1}\}$$

(84)　$=0$　(78)を見よ。

そこで，補助定理(27)を(81)に用いると，次の関係が成立する。

(85)

$\pi_r-\pi_s$

(82)	(83)	(81)
単調増加流列	正	正
単調減少流列	負	符号の判定ができない

すなわち，ここでも，収入・支出がともに各期末に価値流列に参加すると仮定した場合に到達した前節での結果(51)とは異なる結果にみちびく。

そこで，(51)，(75)，(85)，つまり，仮定の異なる３つの場合を総合すると，次のようになる。

(86)

$\pi_r-\pi_s$

仮　定	現価収支差流列	
	単調増加流列	単調減少流列
(A)収入・支出が，ともに，各期末に流列に参加	正	負
(B)収入が各期首に，支出が各期末に流列に参加	符号の判定ができない	負
(C)収入が各期末に，支出が各期首に流列に参加	正	符号の判定ができない

要するに，仮定(A)では $\pi_r-\pi_s$ の正負は必ずいずれかに定まるが，仮定(B)，(C)，では，$\pi_r-\pi_s$ の正負の判定のできない場合がありうる。仮定(B)で現価収支差流列が単調増加を示す場合，および，仮定(C)で現価収支差流列が単調減少を示す場合には，$\pi_r-\pi_s$ の正負判定ができない，したがって，このような場合には，(58)における dG の正負も決定できず，(59)に見られる収支状態の良化，

悪化も結論できない。

最後に，上記の具体的ケースとして生命保険経営について考えてみよう。

生命保険では，保険会社の立場から見て収入である保険料は各期首に払い込まれる一方，保険会社から見て支出である保険金は被保険者の死亡に際してその都度随時に支払われる。したがって，保険金支払時点は，平均して，各期の中央期となる。以下，生命保険契約として最も代表的な終身払込終身保険を例にとって説明しよう。そこで，生命保険会社の立場から見ての収入・支出の現価流列は次のようになる。

(87) 収入：R_1v^0, R_2v^1, ……, R_nv^{n-1}

(88) 支出：$S_1v^{\frac{1}{2}}$, $S_2v^{1+\frac{1}{2}}$, ……, $S_nv^{n-\frac{1}{2}}$

生命保険数学では，しばしば計算簡略化のために保険金は各期末に支払われるとの仮定をとる。この場合は(88)は(64)と全く同じことになる。しかし，ここでは，計算厳密化のために，保険金は各期の中央期に保険会社から支払われるものとする。

そこで，(87)，(88)の合計額を，それぞれ，R，とSしよう。

(89) $R=R_1v^0+R_2v^1+\cdots\cdots+R_nv^{n-1}=\sum R_tv^{t-1}$

(90) $S=S_1v^{\frac{1}{2}}+S_2v^{1+\frac{1}{2}}+\cdots\cdots+S_nv^{n-\frac{1}{2}}=\sum S_tv^{t-\frac{1}{2}}$

また，n期間全体にわたっての収支均衡計画として，$R=S=k$ が要請される。

(91) $\sum R_tv^{t-1}=\sum S_tv^{t-\frac{1}{2}}=k$

つぎに，(89)，(90)のR，Sについて，それぞれ，π_r，π_sを求めよう。

(92) $\pi_r=\dfrac{\sum tR_tv^{t-1}}{\sum R_tv^{t-1}}-1$ (68)に同じ。

(93) $\pi_s=\dfrac{\sum tS_tv^{t-\frac{1}{2}}}{\sum S_tv^{t-\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{2}$

(92)から(93)を辺々さし引き，(91)を考え，また，変形して，

(94) $\pi_r-\pi_s=\dfrac{1}{k}\{\sum t\cdot\dfrac{\sum t(R_tv^{t-1}-S_tv^{t-\frac{1}{2}})}{\sum t}\}-\dfrac{1}{2}$

を得る。なお，(87)，(88)から各期の現価収支差流列

(95) $(R_1v^0-S_1v^{\frac{1}{2}})$，$(R_2v^1-R_2v^{1+\frac{1}{2}})$，……，$(R_nv^{n-1}-S_nv^{n-\frac{1}{2}})$

をとり，これを

(96) t： 1，2，……，n

でウェートづけた加重平均値を求めると，これも，すでに計算したのと同じようにして，

(97) $$\hat{a}_w,\ \bar{a}_w=\frac{\sum t(R_tv^{t-1}-S_tv^{t-\frac{1}{2}})}{\sum t}$$

である。(95)が単調増加流列なるとき(97)は $\hat{a}_w$，(95)が単調減少流列なるとき(97)は $\bar{a}_w$ となる。ただし，生命保険では，(95) は，つねに，単調減少流列を示す。その理由，

生命保険では，保険会社にとって収入たる保険料は毎期払い込み額を一定とする平準保険料式 (uniform premium system) を採るのが最も普通であり，

$$R_1=R_2=\cdots\cdots\cdots=R_n$$

であるが，その割引率の数列が

(98) $v^0>v^1>v^2>\cdots\cdots\cdots>v^{n-1}$

である関係から，各期の保険料現価は単調減少流列

(99) $R_1v^0>R_2v^1>\cdots\cdots>R_nv^{n-1}$

を示す。これに対して，支払保険金は被保険者の死亡率が期を追うにつれて高くなるために，単調増加流列

(100) $S_1<S_2<\cdots\cdots\cdots<S_n$

となるが，この増加傾向は，単調減少数列を示す。その割引率

(101) $v^{\frac{1}{2}}>v^{1+\frac{1}{2}}>\cdots\cdots>v^{n-\frac{1}{2}}$

の減少傾向をはるかに上回るものがあり，したがって，その現価流列は単調増加流列となる。

(102) $S_1v^{\frac{1}{2}}<S_2v^{1+\frac{1}{2}}<\cdots\cdots<S_nv^{n-\frac{1}{2}}$

そこで，(87)，(88)から得られる各期の現価収支差流列

$$(103)\qquad (R_1v^0-S_1v^{\frac{1}{2}})>(R_2v^1-S_2v^{1+\frac{1}{2}})>\cdots\cdots>(R_nv^{n-1}-S_nv^{n-\frac{1}{2}})$$

は極めてはっきりした単調減少流列を示す結果になる。

生命保険では，全期間を通して，そのほぼ前半期に生じる収支余剰（図4で，ほぼ三角形 MPN に囲まれる部分の面積）がほぼ後半期に生じる収支不足（図4で，ほぼ三角形 QPT に囲まれる部分の面積）に見合い相殺するよう，収支均衡計画が立てられる。それゆえ，(103)が単調減少数列を示すことは明白であり，したがって，補助定理(27)によって，(97)では，

$$(104)\qquad \bar{a}_w=\frac{\sum t(R_tv^{t-1}-S_tv^{t-\frac{1}{2}})}{\sum t}<0$$

となり，これを(94)に代入して，次の関係にみちびく。

$$(105)\qquad \pi_r-\pi_s<0$$

すなわち，生命保険経営は，われわれの結論(86)で言うならば，仮定(B)のうち現価収支差流列が単調減少流列をとる場合に属し，したがって，収支均衡計画のもとに経営する保険会社にとって割引率（したがって，利子率）の変化がその収支状態に如何なる作用をおよぼすかは(59)によって知ることができる。つまり，生命保険に関するかぎり，Hicks による平均期間の理論は十分に適用性をもつわけである。

図 4